BMTC-134

सत्रीय कार्य पुस्तिका

(1st जनवरि 2025 से 31st दिसम्बर 2025 तक वैध)

बीज गणित

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गंधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढी, नई दिल्लि
(2025)

प्रिय विद्यार्थी,
हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्षिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रष्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देषों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।:

नामांकन संख्या : ....
नाम : ....
पता: ....
....
....
पाठ्यक्रम संख्या : ....
पाठ्यक्रम शीर्षक: ....
अध्ययन केंद्र : .... **DATE** ....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक काग़ज़ पर बॉयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।।

5) प्रशनों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रशनका कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) **सत्रीय कार्य को कुद हल करें। अपने साथी छात्रों या इंटरनेट से कॉपी न करें। यदि आप नकल करने के दोषी पाए जाते हैं, तो आपका असाइनमेंट अयोग्य घोषित कर दिया जाएगा और आपको अगले सत्र के लिए असाइनमेंट जमा करना होगा।**

7) यह सत्रीय कार्य अध्ययन केन्द्र द्वारा निर्धारित कार्यक्रम के अनुसार अध्ययन केन्द्र में जमा करना होता है। नियत तिथि के बाद प्राप्त उत्तर पुस्तिकाओं को स्वीकार नहीं किया जाएगा।

8) यह सत्रीय कार्य केवल दिसम्बर 2025 तक वैध है। यदि आप इसमें असफल होते हैं या दिसम्बर 2025 तक इसे जमा करने में विफल, तो आपको चाहिए वर्ष 2026 के लिए नया सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उस सत्रीय कार्य में दिए गए निर्देशों के अनुसार जमा करें।

9) **परीक्षा फार्म बर्ने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरि है।**

10) हम पुरज़ोर सुझाव देते हैं कि आप अपने असाइनमेंट प्रत्युत्तर की एक प्रति अपने पास रखें।

सुभ काम्नाऑं के सात।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: BMTC-134
सत्रीय कार्य कोड: BMTC-134/TMA/2025
अधिकतं अंक: 100

1. (क) एक आबेली समूह को परिभाषित कीजिये । एक अनबेली समूह का उदाहरण दीजिये ।(आपको आपका उदाहरण समूह स्थपित करने की ज़रूरत नहीं है, अनबेली स्थापित करना पर्याप्त है ।) (3)

   (ख) एक समूह का उपसमूह परिभाषित कीजिये। जाँच कीजिये कि:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

   योग के सापेक्ष $\mathbb{C}$ पर 2×3 आव्यूहों का समूह का उपसमूह है। (2)

   (ग) एक अर्ध-समूह को परिभाषित कीजिये। एक अनन्त अर्ध-समूह का उदाहरण दीजिये। (2)

   (घ) लैग्रान्ज प्रमेय बताइये। एक कोटि 12 वाली समूह की उपसमूहों की कोटियाँ क्या हो सक्ती हैं? (2)

   (ङ) मान लीजिये $S = \{1, 2, 3, 4\}$ और द्वि-आधारी सम्क्रिया $\star$ $a \star b = a$ द्वार परिभाषित है। $(S, \star)$ की कैली सारणी बनाइये। क्या $\star$ सहचर्य है? क्या $\star$ क्रमविनिमेय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये। (6)

2. (क) मान लीजिये A एक 3×4 वास्तविक आव्यूह है, B एक 4×2 आव्यूह है। निम्नलिखित में से कौन-सी संक्रियाएँ साध्य हैं ?

   (i) $CA + B^t$

   (ii) $AB + C^t$

   जो संक्रियाएँ परिभाषित है उनमें प्राप्त आव्यूह की कोटि क्या होगि ? (3)

   (ख) मान लीजिये $\alpha = (1\,2\,5)$, $\beta = (1\,4\,3\,2) \in S_5$. $\sigma = \alpha\beta^{-1}$ परिकलित कीजिये। σ को पक्षान्तरण के गुणनफल के रूप में लिखिए। σ का चिह्नक क्या है ? (3)

   (ग) यदि F एक क्षेत्र है, तो दिखाइये कि $U(F[x])^* = F^*$. (4)

   (घ) मान लीजिये $R = \mathbb{Z}_{20}$: (5)

   (i) पुष्टि की साथ R में एक शून्य भावी अवयव दीजिये।

   (ii) पुष्टि की साथ R में एक शून्य का भाजक दीजिये जो शून्य भावी न हो।

   (iii) $U(R)$ की कोटि क्या है?

3. (क) मान लीजिये R एक वलय है जिस्में प्रत्येक $a \in R$ के लिये $a^2 = a$. दिखाइये कि $a = -a$ और R क्रम विनिमेय है। (5)

   (ख) एक पूर्णांकीय प्रान्त को परिभषित कीजिये। एक पूर्णांकीय प्रान्त का उदाहरण दीजिये जो क्षेत्रे न हो। (2)

   (ग) निम्नलिखित को परिकलित कीजिये: (3)

   (i) $\mathbb{Z}_5[x]$ में $\left(\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\right) + \left(\bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}\right)$

   (ii) $\mathbb{Z}_7[x]$ में $\left(\bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{6}\right) \cdot \left(\bar{3}x^3 + \bar{4}x + \bar{5}\right)$

   (घ) दिखाइये कि, यदि G एक समूह है और $a \in G$, तो $o(a) \mid o(G)$. आगे दिखाइये प्रत्येक $a \in G$ के लिये $a^{o(G)} = e$. ऑयलर-फर्मा प्रमेय, प्रत्येक $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(a, n) = 1$ के लिए $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ भी दर्शाइये। (5)

4. (क) मान लीजिए $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. जाँच कीजिए कि R $M_2(\mathbb{R})$ का उपवलय है। क्या R $M_2(\mathbb{R})$ की गुणजावली है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (4)

   (ख) बहुपद $x^4 + 3x + 2$ और $x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ का gcd निकालिए। (5)

(ग) यदि H और K एक समूह का प्रसामान्य आबेली उपसमूह हैं और $H \cap K = \{e\}$, तो दिखाइये कि HK आबेली है। क्या यह निष्कर्ष प्रतिबन्ध,H और K प्रसामन्य होना छहिए, हटाने पर भी सत्य होगी? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (6)

5. (क) $U(15)$ में प्रत्येक अवयव की कोटि निकालिए। क्या $U(15)$ चक्रीय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (5)

(ख) मान लीजिए F एक क्षेत्र है और $f(x) \in F[x]$ $F[x]$ में अखन्डनीय है। दिखाइए कि $\langle f(x) \rangle$ एक उच्चिष्ट गुणजावली है। इस्का प्रयोग करके दिखाइए कि $\mathbb{Q}[x]/\langle x^5 + 6x^3 + 12 \rangle$ एक क्षेत्र है। (7)

(ग) माना कि $S^1 = \left\{z \in \mathbb{C}^* || z| = 1\right\}$ और $U_n = \left\{z \in \mathbb{C}^* | z^n = 1\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, जाँच कीजिए कि $U_n \subset S^1$ ।आगे दिखाइये कि $U_n \leq S^1$. (3)

6. (क) दिखाइए कि $\langle x, 5 \rangle$ $\mathbb{Z}[x]$ में मुख्य गुण्जावली नहीं है। (7)

(ख) जांच कीजिए कि $\langle \bar{3} \rangle$ $\mathbb{Z}_9$ की उच्चिष्ट गुअण्जावली या नहीं। (3)

(ग) मान लीजिए R एक वलय है। क्रमविनिमेय होना ज़रूरि नहीं है। मान लीजिए I और J R की गुण्जावलीयाँ है। दिखाइए कि $I \cap J$ और $I + J = \{a + b | a \in I,\ b \in J\}$ R का गुअण्जावलीयाँ है। (5)

7. निम्नलिखित दकथनों में से कौन-से कथन सत्य अओर कौन-से कथन असत्य है? अप्रे उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति उदाहरण द्वारा कीजिए। (10)

(क) प्रत्येक उपसमूह प्रसमान्य है।

(ख) प्रत्येक अबेली समूह चक्रीय है।

(ग) एक तत्सम्की वलय में दो मत्रक का योग मात्रक होता है।

(घ) यदि एक क्षेत्रे का अभिलक्षणक है, अभाज्य है तो क्षेत्र परिमित होता है।

(ङ) एक समूह मे प्रयेक अवयव का कोटि परिमित है तो समूह परिमित होता है।